11/5/20

Κρίσιμα σημεία γραμμικών συστημάτων

Θέλουμε να εξετάσουμε το κρίσιμο σημείο (0,0) του γραμμικού συστήματος:

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Η λύση του συστήματος περιλαμβάνει τη συνάρτηση e^{At} και συνεπώς θα χρειαστούμε τις ιδιοτιμές του πίνακα A. Λύνουμε την εξίσωση:

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = 0$$

Η φύση των ιδιοτιμών μπορεί να είναι:

α) πραγματικές, διακριτές και με το ίδιο πρόσημο
β) -||- -||- διαφορετικό -||-
γ) -||| και ίσες
δ) μιγαδικές
ε) φανταστικές (μιγαδικές με μηδενικό πραγματικό μέρος)

Πραγματικές, διακριτές ιδιοτιμές με το ίδιο πρόσημο

Η λύση του συστήματος γράφεται ως:

$$\vec{x}(t) = \vec{c_1} e^{\lambda_1 t} + \vec{c_2} e^{\lambda_2 t}$$

Δηλαδή

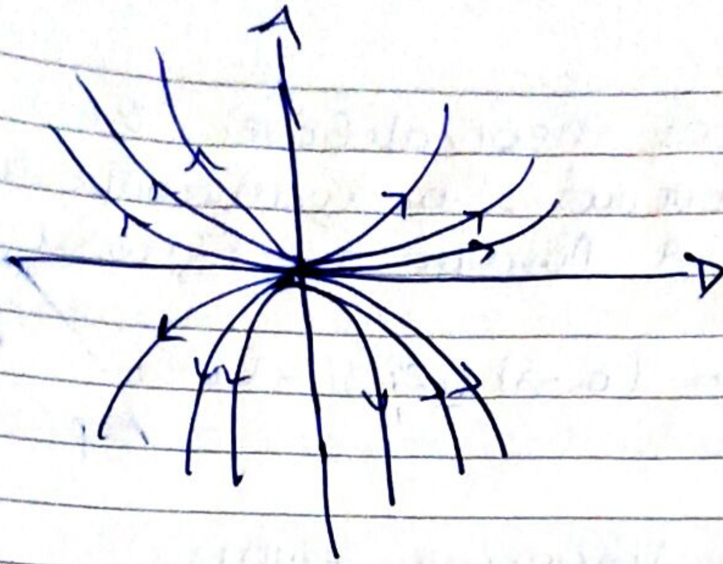
$$\begin{cases} u(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \\ v(t) = c_3 e^{\lambda_1 t} + c_4 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$ Αυτή η λύση αντιστοιχεί στο διάνυσμα $\vec{x}$

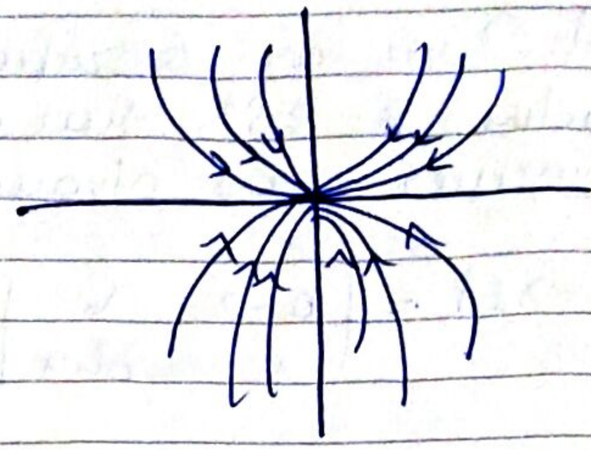
μια από τις τροχιές στο φυσικό χώρο θα δίνεται από τις λύσεις:

$$\begin{cases} u(t) = u_0 e^{\lambda_1 t} \\ v(t) = v_0 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$ ← Ο σκοπός μας είναι να εξαλείψουμε το χρόνο

Συνεπώς $\boxed{v = c_1 u^k}$, $h = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} > 0$ ομόσημα, άρα h: θετικό

Η εξίσωση στον φασικό χώρο



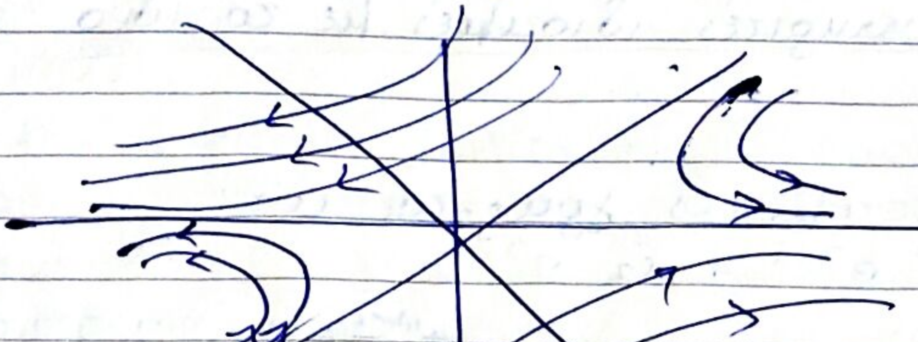


$\lambda_1, \lambda_2 > 0$ πηγή $\qquad$ $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ σημείο συσσώρευσης

Πραγματικές, διακριτές ιδιοτιμές με αντίθετο πρόσημο

Με την ίδια λογική $v = c u^k$ $\quad k = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 0$

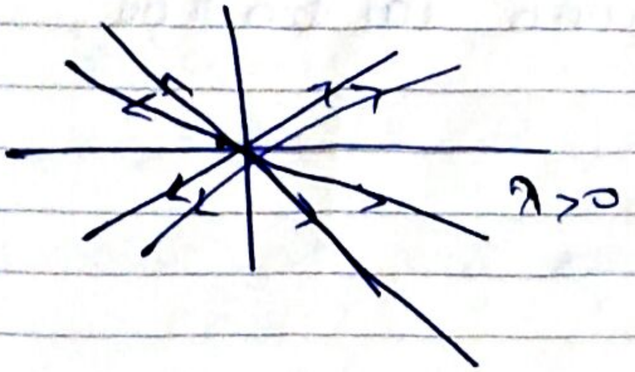
ετερόσημα άρα η αρνητικό

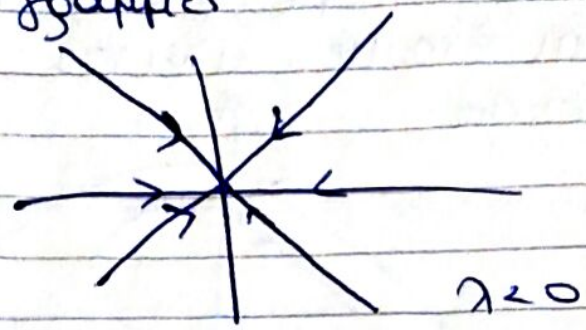


Σαγματικό σημείο

Πραγματικές και ίσες

$v = cu$ και είναι ίσες γραμμές





Μιγαδικές ιδιοτιμές

Έστω ότι οι ιδιοτιμές έχουν τη μορφή:
$\lambda = p + qi$, $\bar{\lambda} = p - qi$ και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\vec{v} = \vec{a} + i\vec{b}$, $\vec{v}^* = \vec{a} - i\vec{b}$
τότε οι λύσεις είναι της μορφής:

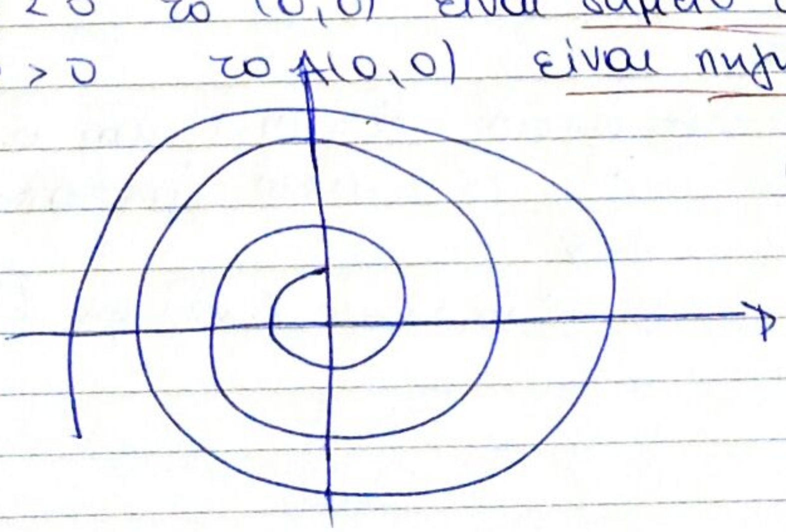
$$\vec{x}(t) = e^{pt}(\vec{a}\cos qt - \vec{b}\sin qt) \quad (*)$$

ή

$$\vec{x}(t) = e^{p(t)}(\vec{b}\cos qt + \vec{a}\sin qt)$$

Που στον χώρο των φάσεων αντιστοιχούν σε σπειροειδή (= κύκλος που δεν κλείνει ποτέ)

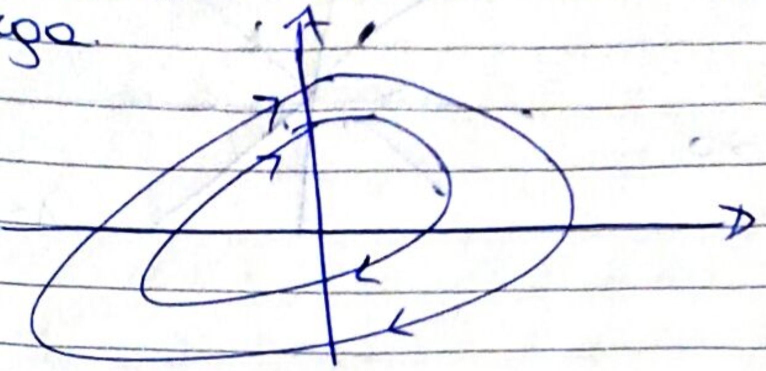
- Αν $p<0$ το $(0,0)$ είναι σημείο συσσώρευσης
- Αν $p>0$ το $(0,0)$ είναι πηγή



(*) Αν $p=0$ θα ήταν ελλείψεις ή κύκλοι

Φανταστικές ιδιοτιμές

Εδώ έχουμε $p=0$ της προηγούμενης περίπτωσης και έχουμε κλειστές ελλείψεις και σταθερό κέντρο.



Συνοπτικά:

- $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ Ευσταθής κόμβος
- $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ ευσταθής κόμβος ή σπειροειδής
- $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ Ασταθές σαγματικό
- $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ Ασταθής κόμβος ή σπειροειδής
- $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ Ασταθής κόμβος
- $\lambda_1, \lambda_2 = a \pm ib$ $(a>0)$ Ασταθής σπειροειδής
- $\lambda_1, \lambda_2 = a \pm ib$ $(a<0)$ Ευσταθής σπειροειδής
- $\lambda_1, \lambda_2 = \pm ib$ κέντρο ή σπειροειδής

Παράδειγμα: Η εξίσωση $m\ddot{x} = -c\dot{x} - hx + bx^2$ αντιστοιχεί σε ένα μη-γραμμικό ελατήριο που έχουμε προσθέσει τριβές ανάλογες της ταχύτητας. Πλέον η μέθοδος πολ/ζω με $\dot{x}$ και ολοκληρώνω αποτυγχάνει

Παρατήρηση: Η αντικατάσταση $\dot{x} = w(x)$ και άρα: $\ddot{x} = \frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dx}\dot{x} = w' \cdot w$ μετασχηματίζει την εξίσωση σε: $m\, w' \cdot w + cw = bx^3 - hx$ (1)

Θα μελετήσουμε τα ισόρροπα σημεία με τη μέθοδο της γραμμικοποίησης. Δηλαδή $y = \dot{x}$ και άρα:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ m\dot{y} &= -cy - kx + bx^3 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\frac{c}{m}y - \frac{k}{m}x\left(1-\frac{b}{k}x^2\right) \end{aligned}\right.$$

↑ μη-γραμμικός όρος

Δηλαδή $y=0$ και $x\left(1-\frac{b}{k}x^2\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2=\frac{k}{b} \end{cases}$

Τα ισόρροπα σημεία είναι $(0,0)$, $\left(-\sqrt{\frac{k}{b}},0\right)$, $\left(\sqrt{\frac{k}{b}},0\right)$. Επίσης: $J=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m}+\frac{3b}{m}x^2 & -\frac{c}{m} \end{pmatrix}$

$$J(0,0)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{pmatrix}$$

$$J\left(\pm\sqrt{\frac{k}{b}},0\right)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m}+\frac{3b}{m}\frac{k}{b} & -\frac{c}{m} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2k}{m} & -\frac{c}{m} \end{pmatrix}$$

Ιδιοτιμές

a) $J(0,0)$: $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m}-\lambda \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \frac{1}{m}(m\lambda^2+c\lambda+k)=0$

άρα:

$$\lambda=\frac{-c\pm\sqrt{c^2-4km}}{2m}, \text{ δηλαδή}$$

(i) $c^2 - 4hm > 0$, σημείο συσσώρευσης εδώ δεν
(ii) $c^2 - 4hm < 0$, σπειροειδής + | - μπαίνει το b

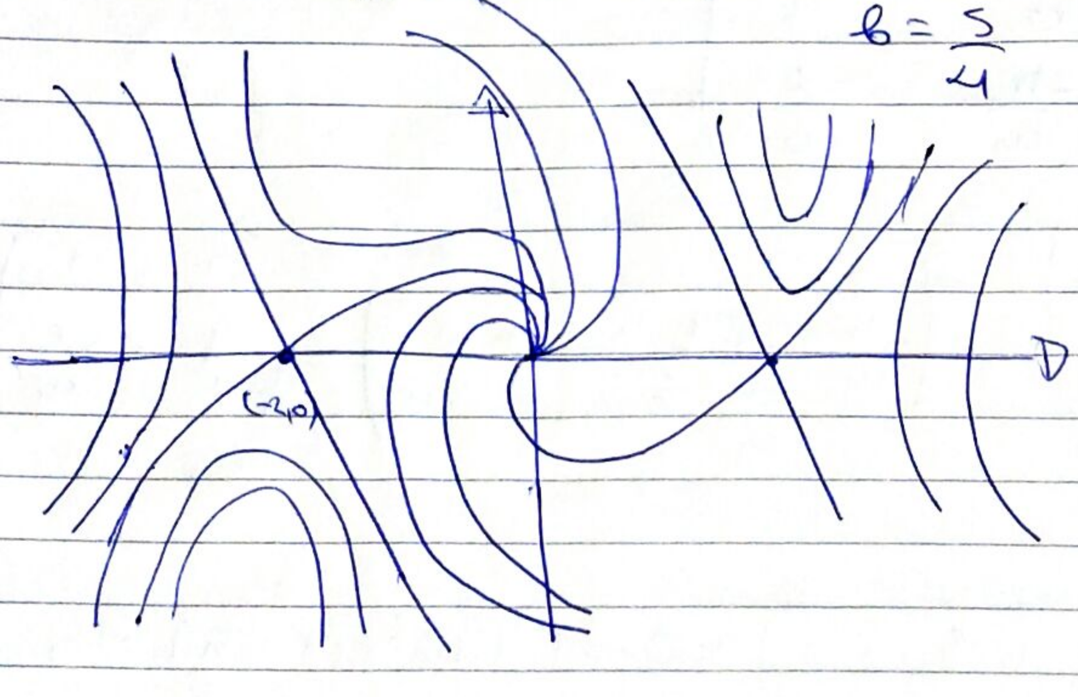
b) $J\left(\pm\sqrt{\frac{k}{b}}, 0\right)$: $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ \frac{2h}{m} & -\frac{c}{m} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{m}(m\lambda^2 + c\lambda - 2h) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 + 8hm}}{2m}$

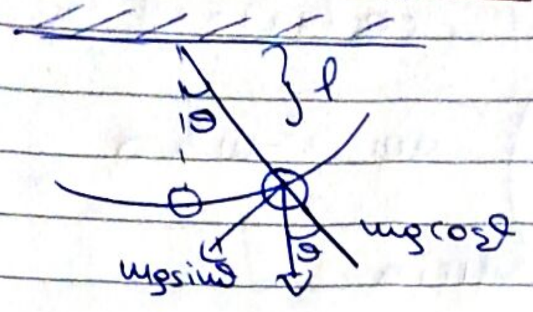
Άρα αν : $\lambda_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 8hm}}{2m} > 0$

$\lambda_2 = \frac{-c - \sqrt{c^2 + 8hm}}{2m} < 0$

Ασταθή σαγματικά σημεία. Έστω $m=1$, $c=2$, $h=5$, $b = \frac{5}{4}$



Το απλό εκκρεμές



Στη μορφή των διανυσμάτων κίνησης (πολικές συν/νες) η επιτάχυνση δίνεται από:

$$\vec{a} = [\ddot{r} - r(\dot{\theta})^2]\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta} = a_r\hat{r} + a_\theta\hat{\theta}$$

Στη διεύθυνση της κίνησης

$$mg\sin\theta = m a_\theta \Leftrightarrow 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = g\sin\theta$$

Όμως $r = \ell$ και άρα: $\ell\ddot{\theta} = g\sin\theta \Leftrightarrow \ddot{\theta} - \omega^2\sin\theta = 0$

όπου: $\omega^2 = \frac{g}{\ell} > 0$

Γράφουμε την εξίσωση σε μορφή συστήματος

$$\begin{cases} x = \theta \\ y = \dot{\theta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2\sin x \end{cases}$$

Δηλ. τα κρίσιμα σημεία είναι $y = 0$ και $\sin x = 0$
$\Rightarrow x = n\pi$

Η Ιακωβιανή μήτρα είναι:

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2\cos x & 0 \end{pmatrix}$$

και τα κρίσιμα σημεία διαχωρίζονται ως εξής

α) <u>n = άρτιος</u>: Αν $n = 2k$, $\cos(k\pi) = 1$

$$J = (2k\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$$

και οι αντίστοιχες ιδιοτιμές είναι $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ και άρα αυτά τα σημεία είναι κέντρα κλειστών τροχιών

b) <u>n περιττός</u> : Αν $n=2k+1$, $\cos(n\pi)=-1$

$$J(2k\pi+\pi,0)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \omega^2 & 0\end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \lambda^2-\omega^2=0$$

δηλ. έχουμε σαγματικά σημεία

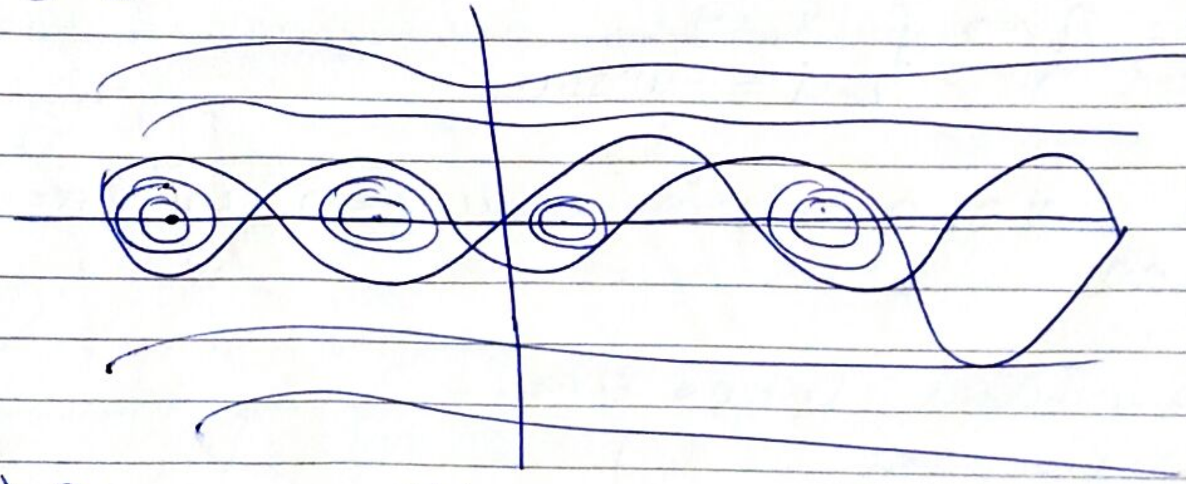
<u>Οι τροχιές</u> : $\ddot\theta-\omega^2\sin\theta=0 \Rightarrow \frac{1}{2}(\dot\theta)^2+\omega^2\cos\theta=E$

Άρα : $(\dot\theta)^2=2E-2\omega^2\cos\theta$

Ας υποθέσουμε ότι: $\begin{cases}\theta(0)=\theta_0\\ \dot\theta(0)=0\end{cases}$

τότε $2E=2\omega^2\cos\theta_0 \Rightarrow E=\omega^2\cos\theta_0$

Προφανώς στα πλαίσια της κίνησης $E>\omega^2$



<u>Η λύση της εξίσωσης</u>

Από την εξίσωση $(\dot\theta)^2=2E-2\omega^2\cos\theta \Rightarrow$

$(\dot\theta)^2=2(\omega^2\cos\theta_0-\omega^2\cos\theta)\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{d\theta}{dt}=\omega\sqrt{2}\sqrt{\cos\theta_0-\cos\theta} \Rightarrow \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta_0-\cos\theta}}=\omega\sqrt{2}\,dt$

Το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}}$$ είναι ένα ελλειπτικό ολ/μα και μπορεί να υπολογιστεί σε μορφή σειράς. Δηλαδή

$$T = \frac{2\pi}{\omega}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\sin\frac{\theta_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \left(\sin\frac{\theta_0}{2}\right)^4 + \dots\right]$$

Για μικρές τιμές του θ_0 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση

Άσκηση: Το σύστημα με τριβές

$$\frac{dx}{dt} = y$$

$$\frac{dy}{dt} = -\omega^2 \sin x - cy$$